**למידת מכונה - מטלה 2**

מגישים: איתי רפיעי (208426106), אלמוג יעקב מעטוף (203201389)

פתרנו את כל המטלה בפגישות זום משותפות באופן שווה. תוך כדי שיתוף דרכי חשיבה והסקת מסקנות.

1. מהו ממד ה-VC של מלבנים חד-כיווניים מיושרים (בציר) בנקודות D-ממדיות (בפנים אדום, מבחוץ כחול)?

**תשובה:**

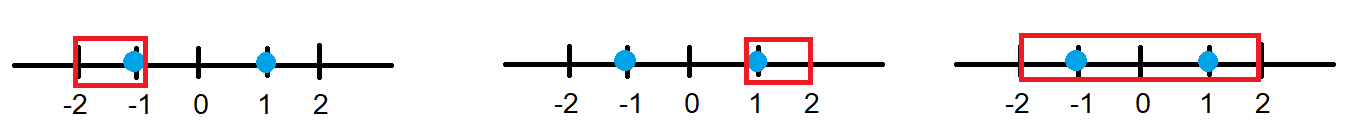
הvc-dimension של מלבן בd מימדים הוא: 2d.

**תחילה** נראה כי קיים סידור של 2d קודקודים על d מימדים שמלבן יכול לנפץ.

על כל ציר של מימד נשים קודקוד אחד ב1 ואחד ב 1- על הציר.

ניתן לראות כי אפשר לנפץ כל קבוצה של קודקודים בעזרת מלבן כאשר עבור כל קודקוד חיובי הגבול של אותו המימד של המלבן יהיה 2 ועבור כל קודקוד שלילי שבקבוצה הגבול של המלבן יהיה 2- .

ניתן לראות דוגמה עבור מימד אחד:



ניתן לראות דוגמה עבור שני מימדים כאשר על כל קודקוד בגודל 1 אנחנו נבחר גבול שגדול מ1 וקודקוד בגודל 1- נבחר גבול שקטן ממנו:

A picture containing colorful, different, colors, attached

Description automatically generated

**כעת** נוכיח כי לא קיים סידור של 2d+1 קודקודים בd מימדים אשר מלבן יכול לנפץ:

נניח כי קיים סידור של 2d+1 קודקודים. נבחר את הקבוצה של הקודקודים כך שניקח את הקודקוד הגדול ביותר ואת הקטן ביותר בכל מימד. ניתן לראות כי על פי עקרון שובך היונים קיים קודקוד אחד שנמצא בתוך הגבולות של הקודקודים ולכן לא ניתן לנפץ את קבוצה זו. סתירה!

ולכן הvc-dimension של מלבן בd מימדים הוא: 2d.

1. מהו ממד ה-VC של מלבנים **דו-כיווניים** מיושרים (בציר) במישור?

**תשובה:**

נוכיח כי ה-vc-dimension של מלבן דו כיווני הוא 5.

**תחילה** נראה כי הוא יכול לנפץ חמישה קודקודים: (ניתן לראות בבירור כי הוא יכול לנפץ כל קודקוד בנפרד ואת כל הקודקודים ביחד לכן הוא יכול לנפץ גם 4 קודקודים כי הוא דו כיווני, נראה עבור זוגות וזה יוכיח עבור שלישיות בגלל שהוא דו כיווני)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Chart, line chart  Description automatically generated | Chart  Description automatically generated | Chart, line chart  Description automatically generated | A picture containing wall, tiled, dirty  Description automatically generated |
| Chart  Description automatically generated | Chart, line chart  Description automatically generated | Chart, line chart  Description automatically generated | Chart, line chart  Description automatically generated |
| Chart, line chart  Description automatically generated | Chart, line chart  Description automatically generated |

אכן מצאנו סידור של 5 קודקודים שמלבן דו כיווני מנפץ.

**כעת** נראה כי לא קיים סידור של 6 קודקודים שמלבן דו כיווני יכול לנפץ:

נניח כי קיים סידור של 6 קודקודים אשר מלבן יכול לנפץ אותם. נחסום אותם בעזרת מלבן בצורה מינימלית ונקבל ששני נקודות נמצאות בתוך המלבן,

Chart, scatter chart, bubble chart

Description automatically generatedלדוגמה:

ניתן לראות בדוגמה כי 4 הכדורים הכחולים נחסמים על ידי מלבן מינימלי ונשאר 2 כדורים בפנים

בגלל שהנחנו כי ניתן לנפץ 6 קודקודים אזי ניתן גם לנפץ כל 3 קודקודים.

Chart, scatter chart, bubble chart

Description automatically generatedניקח קודקוד מסוים שנמצא בתוך הריבוע ונבחר את שני הקודקודים הקרובים יותר לקודקוד השני שנמצא בתוך הריבוע.

בדוגמה שלנו נבחר כך:

כעת נרצה להקיף אותם במלבן אך שלושתם ביחד מכילים גם את הקודקוד השני שנמצא בתוך הגבולות של המלבן המינימלי. מכיוון שזהו מלבן דו כיווני נרצה לבדוק אם הוא מחסה את 3 הקודקודים הנגדיים אך בדומה לשלישיה הקודמת שני הקודקודים שעל הגבולות של המלבן המינימלי ביחד עם הקודקוד הרחוק שנמצא בתוכו תמיד יכילו במלבן את הקודקוד שני שנמצא בתוך הגבולות. וזו סתירה!

1. מהו ממד ה-VC של כדורים חד-כיווניים בנקודות D-ממדיות (בפנים אדום, מבחוץ כחול)?

**תשובה:**

הvc-dimension של כדור בd מימדים הוא: d+1.

**תחילה** נראה כי קיים סידור של d+1 קודקודים על d מימדים שכדור יכול לנפץ.

על כל ציר של מימד נשים קודקוד אחד ב1 ובנוסף נשים קודקוד על ראשית הצירים.

כעת עבור כל קבוצה שנרצה לנפץ נבחר את מרכז הכדור להיות בנקודה של סכום כל הוקטורים של הנקודות בקבוצה.

נניח כי גודל הקבוצה הוא k ניתן לראות כי המרחק של הנקודות שנמצאות בקבוצה חוץ מראשית הצירים הוא המרחק של ראשית הצירים הוא והמרחק של שאר הנקודות שלא נמצאות בקבוצה הוא ולכן אם מרכז המעגל נמצא בקבוצה נבחר למעגל רדיוס של ואם הוא לא נמצא נבחר .

בדרך זו ניתן לנפץ כל קבוצה של קודקודים בעזרת כדור.

**כעת** נוכיח כי לא קיים סידור של d+2 קודקודים בd מימדים שכדור יכול לנפץ:

*נניח כי קיים סידור של d+2 קודקודים בd מימדים אשר כדור מנפץ אותם.*

*לכן קיים עבור כל חלוקה של הקודקודים לשתי קבוצות שני כדורים אשר מנפצים רק את הקודקודים שבאותה קבוצה. שני כדורים אלו יכולים להיחתך אך בעזור החיתוך אסור שיהיה קודקוד של הקבוצה השנייה. לכן ניתן להעביר מישור בנקודה זו אשר מפריד בין שני קבוצות הקודקודים.*

*על פי משפט רדון כל קבוצה של d+2 נקודות ב-d מימדים ניתן לחלוקה לשתי קבוצות אשר הקמור שלהן נחתך.*

*בשיעור ראינו שלא ניתן לנפץ שתי קבוצות שהקמור שלהן נחתך בעזרת כדור. כלומר קיים סידור של שתי קבוצות שלא קיים להם שני כדורים שמנפצים אותם שניתן להפריד אותם בעזרת מישור. ולכן אי אפשר יהיה לנפץ אותם. סתירה!*

1. תן גבול עליון לממד ה-VC של עיגולים **דו-כיווניים** במישור.

**תשובה:**

נוכיח שהגבול העליון של ממד ה-VC של עיגולים דו-כיווניים במישור הוא 7.

נניח בשלילה שממד ה-VC גדול מ-7 ולכן בפרט יכול לנפץ לפחות סט נקודות מסוים P במישור בגודל 8.

תהי חלוקה כלשהי של P לשני קבוצות A, B כך שגודל כל קבוצה הוא 4 (נקודות).

אנו יודעים שעיגול חד כיווני אינו יכול לנפץ קבוצה בגודל 4. ולכן, קיים תיוג מסוים אותו עיגול חד כיווני אינו יכול להשיג ב-A. וגם קיים תיוג מסוים אותו עיגול חד כיווני אינו יכול להשיג ב-B.

נביט בכל קבוצה **בנפרד** (תוך התעלמות מהקבוצה השנייה) ונסמן:

* : קבוצת הנקודות ב-A אותם עיגול חד-כיווני לא יכול להשיג (כאדומות).

ומכאן, היא הקבוצה המשלימה של ב-A.

* : קבוצת הנקודות ב-B אותם עיגול חד-כיווני לא יכול להשיג (כאדומות).

ומכאן, היא הקבוצה המשלימה של ב-B.

נשים לב כי מתקיים  *וחיתוך כל זוג ריק.*

נגדיר את הקבוצות: .

(כאמור, מתקיים וגם ).

ע"פ ההנחה, ניתנת לניפוץ בעזרת עיגולים דו-כיוונים

וע"פ ההגדרה לעיל, מייצגות חלוקה מסוימת של P לשני קבוצות

לכן, בפרט קיים עיגול דו-כיווני המשיג חלוקה זו. כלומר, בהכרח קיים עיגול

**חד-כיווני** המשיג את קבוצה **או/וגם** קיים עיגול **חד-כיווני** המשיג את קבוצה .

אם העיגול החד-כיווני משיג את קבוצה אזי הוא משיג את ולכן אם נתעלם מהנקודות של קבוצה B נקבל שקבוצה ניתנת לניפוץ בA. סתירה.

אם העיגול החד-כיווני משיג את קבוצה אזי הוא משיג את ולכן אם נתעלם מהנקודות של קבוצה A נקבל שקבוצה ניתנת לניפוץ בB. סתירה.

כלומר, ההנחה שממד ה-VC גדול מ-7 גוררת סתירה ולכן נובע שגבולו העליון 7.

1. הוכיחו גבול עליון לממד ה-VC של השלבים האינסופיים של הירח. כל שלב הוא הצטלבות של שני כדורים, אחד שבו הלבן בפנים, ואחד שבו הלבן בחוץ.



כלומר, כדור אחד שבתוכו לבן, וכדור שני שלבן מבחוץ. החיתוך שלהם (חיתוך אזורים הלבנים) הוא ירח לבן.

נשים לב כי ע"פ הגדרת החוקים הנ"ל - כל חוק כזה הוא הצטלבות של **שני** חוקים פשוטים מאוסף החוקים של עיגולים דו-כיווניים: עיגול אחד עם לבן בפנים ועיגול אחד עם לבן בחוץ (אוסף עיגולים דו-כווני הוא אוסף של כדורים, שכל כדור מופיע שם פעמיים, העתק אחד עם לבן בפנים ועוד העתק עם לבן בחוץ).

כפי שהוכחנו בסעיף 2.ב ממד ה-VC של אוסף זה הינו לכל היותר 7.

לכן, ע"פ תאוריית החיתוך:

ובהכרח הסט מכיל את החוקים המוגדרים בשאלה (החוקים של השלבים האינסופיים של הירח) וניתן לחסום עם סט זה.

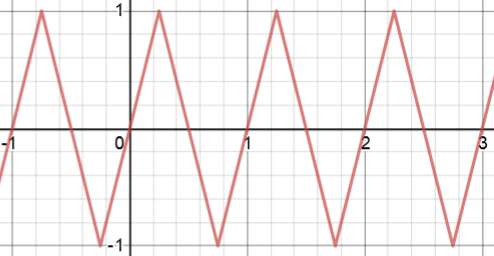
מתקיים שממד ה-VC המתקבל מהחוקים לעיל חסום מלמעלה ע"י:

כלומר, ממד ה-VC חסום מלמעלה ע"י 72.378 ולכן הוא לכל היותר 72.

מ.ש.ל

1. מהו ממד ה-VC של הסט האינסופי של פונקציות גל משולש עם משרעת 1 ופרמטר מחזור p בנקודות על הישר? (ראה תמונה עבור p=1). הוכח את תשובתך.

דוגמא עבור P=1:



**תשובה:** ממד ה-VC הוא אינסופי.

הסבר (לפני ההוכחה): נשים לב שתיוג נקודה בסט הנ"ל הינה כאשר הנקודה נמצאת בתוך המשולש עם הפיק העליון.

(ליעד הסביר על 2 היבטים שונים ולכן הסברנו ע"פ היבט זה).

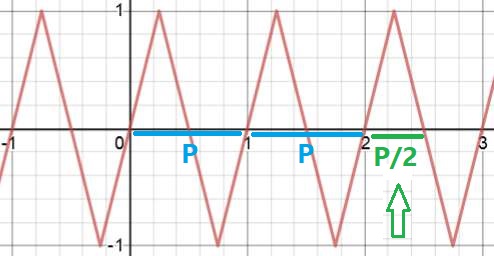
נשים לב שמתכונת גל משולש נקודה נמצאת בתוך משולש עם פיק עליון אם מתקיים:

(1)

עבור *.*

*כלומר, הנקודה נמצאת בתוך המשולש עם הפיק העליון אם הנקודה נמצאת ב****חצי*** *הראשון של גודל עבור כלשהו (הנקבע ע"י [ צעדים בגודל מראשית הצירים]).*

*דוגמא עבור :*

**

*באופן דומה,* מתכונת גל משולש, נקודה **לא** נמצאת בתוך משולש עם פיק עליון אם מתקיים*:*

*(2)*

עבור *.*

*נשים לב לשקילות הבאה:*

*[עבור הביטוי הראשון (1) של נקודה ש****כן*** *נמצאת במשולש עם פיק עליון]:*

*(חלוקת כל אגף ב-P כאשר P מוגדר להלן, ואז הכפלה בביטוי ).*

*ולכן על מנת שהנקודה תהיה במשולש עם פיק עליון נוכל לדרוש שיתקיים:*

*ומכיוון שאנו מציבים את הביטוי בפונקציית סינוס:*

*וביטוי מהצורה (כאשר ) שקול ל-0 ממחזוריות הפונקציה, אז מספיק לדרוש:*

*באופן זהה אם נבצע את אותם פעולות מתמטיות על המשוואה השנייה לעיל (2) נקבל שמתקיים שנקודה* ***לא*** *תהיה במשולש עם פיק עליון אם מתקיים:*

*כעת, נוכיח את נכונות הטענה:*

*עבור כל מספר m של נקודות ניקח את סט הנקודות הממוקמים ע"י בהתאמה. וכאשר התגים השרירותיים שלהם הינם*

*בהתאמה.*

*(ערך תג 1 מייצג נקודה אדומה וערך תג -1 מייצג נקודה כחולה).*

*נבחר את p כך:*

*כאשר:*

*עבור j כלשהו נקבל:*

*אבל נוכל להתעלם מהביטוי האחרון כיוון שהוא מבטא כפולות של שהוא מחזורי עבור פונקציית סינוס כפי שהסברנו לעיל.*

*ולכן נותר לנו למצוא חסם עליון ותחתון לביטוי:*

*חסם עליון ותחתון:*

*כאשר האי-שוויון השני נובע מכך שערך לכל היותר 1.*

*לכן, אם אז נקבל ואז מתקיים: . כלומר, הנקודה נבחרה.*

*ואם אז נקבל ואז מתקיים: . כלומר, הנקודה לא נבחרה.*

*ומכיוון שהראנו שהטענה מתקיימת עבור כל מספר m של נקודות,*

*אזי, נסיק כי* ממד ה-VC הוא אינסופי.

*מ.ש.ל*