**למידת מכונה - מטלה 2**

מגישים: איתי רפיעי (208426106), אלמוג יעקב מעטוף (203201389)

פתרנו את כל המטלה בפגישות זום משותפות באופן שווה. תוך כדי שיתוף דרכי חשיבה והסקת מסקנות.

1. מהו ממד ה-VC של מלבנים חד-כיווניים מיושרים (בציר) בנקודות D-ממדיות (בפנים אדום, מבחוץ כחול)?

**תשובה:**

1. מהו ממד ה-VC של מלבנים **דו-כיווניים** מיושרים (בציר) במישור?

**תשובה:**

1. מהו ממד ה-VC של כדורים חד-כיווניים בנקודות D-ממדיות (בפנים אדום, מבחוץ כחול)?

**תשובה:**

1. תן גבול עליון לממד ה-VC של עיגולים **דו-כיווניים** במישור.

**תשובה:**

נוכיח שהגבול העליון של ממד ה-VC של עיגולים דו-כיווניים במישור הוא 7.

נניח בשלילה שממד ה-VC גדול מ-7 ולכן בפרט יכול לנפץ לפחות סט נקודות מסוים P במישור בגודל 8.

תהי חלוקה כלשהי של P לשני קבוצות A, B כך שגודל כל קבוצה הוא 4 (נקודות).

אנו יודעים שעיגול חד כיווני אינו יכול לנפץ קבוצה בגודל 4. ולכן, קיים תיוג מסוים אותו עיגול חד כיווני אינו יכול להשיג ב-A. וגם קיים תיוג מסוים אותו עיגול חד כיווני אינו יכול להשיג ב-B.

נביט בכל קבוצה **בנפרד** (תוך התעלמות מהקבוצה השנייה) ונסמן:

* : קבוצת הנקודות ב-A אותם עיגול חד-כיווני לא יכול להשיג (כאדומות).

ומכאן, היא הקבוצה המשלימה של ב-A.

* : קבוצת הנקודות ב-B אותם עיגול חד-כיווני לא יכול להשיג (כאדומות).

ומכאן, היא הקבוצה המשלימה של ב-B.

נשים לב כי מתקיים  *וחיתוך כל זוג ריק.*

נגדיר את הקבוצות: .

(כאמור, מתקיים וגם ).

ע"פ ההנחה, ניתנת לניפוץ בעזרת עיגולים דו-כיוונים

וע"פ ההגדרה לעיל, מייצגות חלוקה מסוימת של P לשני קבוצות

לכן, בפרט קיים עיגול דו-כיווני המשיג חלוקה זו. כלומר, בהכרח קיים עיגול

**חד-כיווני** המשיג את קבוצה **או/וגם** קיים עיגול **חד-כיווני** המשיג את קבוצה .

אם העיגול החד-כיווני משיג את קבוצה אזי הוא משיג את ולכן אם נתעלם מהנקודות של קבוצה B נקבל שקבוצה ניתנת לניפוץ בA. סתירה.

אם העיגול החד-כיווני משיג את קבוצה אזי הוא משיג את ולכן אם נתעלם מהנקודות של קבוצה A נקבל שקבוצה ניתנת לניפוץ בB. סתירה.

כלומר, ההנחה שממד ה-VC גדול מ-7 גוררת סתירה ולכן נובע שגבולו העליון 7.

1. הוכיחו גבול עליון לממד ה-VC של השלבים האינסופיים של הירח. כל שלב הוא הצטלבות של שני כדורים, אחד שבו הלבן בפנים, ואחד שבו הלבן בחוץ.



כלומר, כדור אחד שבתוכו לבן, וכדור שני שלבן מבחוץ. החיתוך שלהם (חיתוך אזורים הלבנים) הוא ירח לבן.

נשים לב כי ע"פ הגדרת החוקים הנ"ל - כל חוק כזה הוא הצטלבות של **שני** חוקים פשוטים מאוסף החוקים של עיגולים דו-כיווניים: עיגול אחד עם לבן בפנים ועיגול אחד עם לבן בחוץ (אוסף עיגולים דו-כווני הוא אוסף של כדורים, שכל כדור מופיע שם פעמיים, העתק אחד עם לבן בפנים ועוד העתק עם לבן בחוץ).

כפי שהוכחנו בסעיף 2.ב ממד ה-VC של אוסף זה הינו לכל היותר 7.

לכן, ע"פ תאוריית החיתוך:

ובהכרח הסט מכיל את החוקים המוגדרים בשאלה (החוקים של השלבים האינסופיים של הירח) וניתן לחסום עם סט זה.

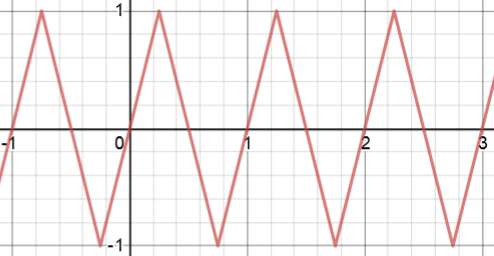
מתקיים שממד ה-VC המתקבל מהחוקים לעיל חסום מלמעלה ע"י:

כלומר, ממד ה-VC חסום מלמעלה ע"י 72.378 ולכן הוא לכל היותר 72.

מ.ש.ל

1. מהו ממד ה-VC של הסט האינסופי של פונקציות גל משולש עם משרעת 1 ופרמטר מחזור p בנקודות על הישר? (ראה תמונה עבור p=1). הוכח את תשובתך.

דוגמא עבור P=1:



**תשובה:** ממד ה-VC הוא אינסופי.

הסבר (לפני ההוכחה): נשים לב שתיוג נקודה בסט הנ"ל הינה כאשר הנקודה נמצאת בתוך המשולש עם הפיק העליון.

(ליעד הסביר על 2 היבטים שונים ולכן הסברנו ע"פ היבט זה).

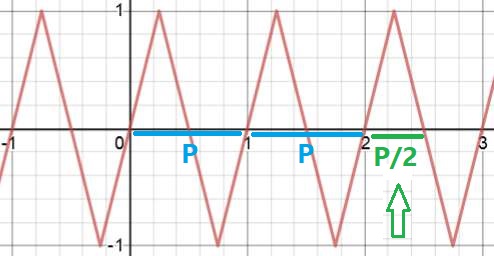
נשים לב שמתכונת גל משולש נקודה נמצאת בתוך משולש עם פיק עליון אם מתקיים:

(1)

עבור *.*

*כלומר, הנקודה נמצאת בתוך המשולש עם הפיק העליון אם הנקודה נמצאת ב****חצי*** *הראשון של גודל עבור כלשהו (הנקבע ע"י [ צעדים בגודל מראשית הצירים]).*

*דוגמא עבור :*

**

*באופן דומה,* מתכונת גל משולש, נקודה **לא** נמצאת בתוך משולש עם פיק עליון אם מתקיים*:*

*(2)*

עבור *.*

*נשים לב לשקילות הבאה:*

*[עבור הביטוי הראשון (1) של נקודה ש****כן*** *נמצאת במשולש עם פיק עליון]:*

*(חלוקת כל אגף ב-P כאשר P מוגדר להלן, ואז הכפלה בביטוי ).*

*ולכן על מנת שהנקודה תהיה במשולש עם פיק עליון נוכל לדרוש שיתקיים:*

*ומכיוון שאנו מציבים את הביטוי בפונקציית סינוס:*

*וביטוי מהצורה (כאשר ) שקול ל-0 ממחזוריות הפונקציה, אז מספיק לדרוש:*

*באופן זהה אם נבצע את אותם פעולות מתמטיות על המשוואה השנייה לעיל (2) נקבל שמתקיים שנקודה* ***לא*** *תהיה במשולש עם פיק עליון אם מתקיים:*

*כעת, נוכיח את נכונות הטענה:*

*עבור כל מספר m של נקודות ניקח את סט הנקודות הממוקמים ע"י בהתאמה. וכאשר התגים השרירותיים שלהם הינם*

*בהתאמה.*

*(ערך תג 1 מייצג נקודה אדומה וערך תג -1 מייצג נקודה כחולה).*

*נבחר את p כך:*

*כאשר:*

*עבור j כלשהו נקבל:*

*אבל נוכל להתעלם מהביטוי האחרון כיוון שהוא מבטא כפולות של שהוא מחזורי עבור פונקציית סינוס כפי שהסברנו לעיל.*

*ולכן נותר לנו למצוא חסם עליון ותחתון לביטוי:*

*חסם עליון ותחתון:*

*כאשר האי-שוויון השני נובע מכך שערך לכל היותר 1.*

*לכן, אם אז נקבל ואז מתקיים: . כלומר, הנקודה נבחרה.*

*ואם אז נקבל ואז מתקיים: . כלומר, הנקודה לא נבחרה.*

*ומכיוון שהראנו שהטענה מתקיימת עבור כל מספר m של נקודות,*

*אזי, נסיק כי* ממד ה-VC הוא אינסופי.

*מ.ש.ל*